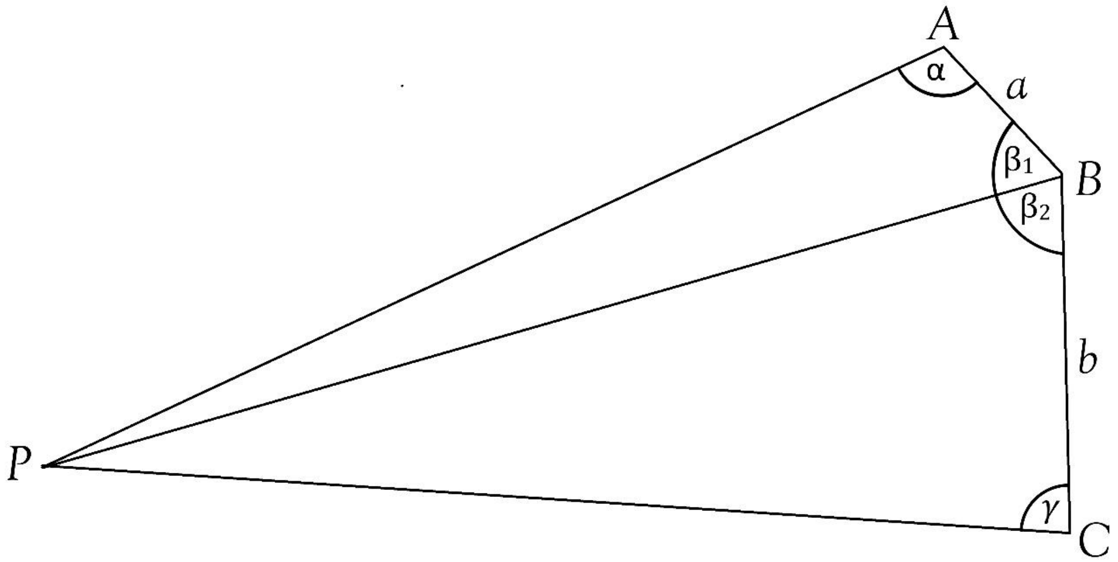
Aufgabe 3

Um die Entfernung eines Punktes P, der von dem Standpunkte des Beobachters (B) nicht sichtbar ist, zu bestimmen, mißt derselbe 2 Standlinien nach den Punkten A und C ab, von denen P sichtbar ist, und auch die Winkel ABC, BAP, BCP. Es ist BP zu berechnen.

Zahlenbeispiel : BA = 115,64 BC = 242,37;
∢ ABC = 136° 54‘ 5“ ∢ BAP = 107° 6‘ 3“ ∢ BCP = 85° 27‘ 9“.

Lösung

Planfigur



BA = a = 115,64
BC = b = 242,37

Winkel in Dezimalgrad umgerechnet

∢ABC β = 136° 54‘ 55“ ≈ 136,9014°
∢BAP α = 107° 6‘ 3“ ≈ 107,1008°
∢BCP γ = 85° 27‘ 9“ ≈ 85,4525°

$\beta = \beta_1 + \beta_2 \quad \beta_2 = \beta - \beta_1 = 136{,}9014° - \beta_1$

Nach dem Sinussatz gilt im Dreieck ABP
BP : sin(α) = a : sin(180° – α – β_1)

und im Dreieck BCP
BP : sin(γ) = b : sin(180° – γ – β_2)

nach BP aufgelöst und gleichgesetzt:

$a\cdot \sin(\alpha) : \sin(180° - \alpha - \beta_1) = b\cdot\sin(\gamma) : \sin(180° - \gamma - \beta_2)$

Überkreuzmultiplikation

$a\cdot \sin(\alpha)\cdot\sin(180° - \gamma - \beta_2) = b\cdot\sin(\gamma)\cdot\sin(180° - \alpha - \beta_1)$

Werte für a und b und die Winkel eingesetzt:

$110{,}5274\cdot\sin(180° - 85{,}4525° - \beta_2) = 241{,}6070\cdot\sin(180° - 107{,}1008° - \beta_1)$

$110{,}5274\cdot\sin(180°-85{,}4525° - (136{,}9014°-\beta_1) = 241{,}6070\cdot\sin(180°-107{,}1008°-\beta_1)$

$110{,}5274\cdot\sin(180° - (\beta_1 - 42{,}3539°) = 241{,}6070\cdot\sin(180° - (107{,}1008° + \beta_1)$

Unter Verwendung der Identität sin(180° – x) = sin(x) vereinfacht

$110{,}5274\cdot\sin(\beta_1 - 42{,}3539°) = 241{,}6070\cdot\sin(107{,}1008° + \beta_1)$

$0{,}4575\cdot\sin(\beta_1 - 42{,}3539°) = \sin(107{,}1008° + \beta_1)$ *

* Wenn der Taschenrechner einen Solver enthält, kann der Winkel β_1 auch über diese Gleichung bestimmt werden.

Winkel $\boldsymbol{\beta_1}$ unter Anwendung der Additionstheoreme bestimmen

$\text{Sin}(x \pm y) = \sin(x)\cdot\cos(y) \pm \cos(x)\cdot\sin(y)$

$0{,}4575\cdot(\sin(\beta_1)\cdot\cos(42{,}3539°) - \cos(\beta 1)\cdot\sin(42{,}3539°)) = \sin(107{,}1008°)\cdot\cos(\beta_1) + \cos(107{,}1008°)\cdot\sin(\beta_1)$

Division durch cos($\boldsymbol{\beta_1}$)

$0{,}3381\cdot\tan(\beta 1) - 0{,}3082 = 0{,}9558 - 0{,}2941\cdot\tan(\beta_1) \quad | \sin(\beta_1):\cos(\beta_1) = \tan(\beta_1)$

$0{,}3381\cdot\tan(\beta 1) + 0{,}2941\cdot\tan(\beta_1) = 0{,}9558 + 0{,}3082$

$\tan(\beta_1)=(0{,}9558+0{,}3082):(0{,}3381+0{,}2941) = 1{,}9994$ und $\mathbf{\tan^{-1}(1{,}9994)}=\boldsymbol{\beta_1} \approx \mathbf{63{,}43°}$

$\boldsymbol{\beta_1}$ in BP = a· sin($\boldsymbol{\alpha}$) : sin(180° – $\boldsymbol{\alpha}$ – $\boldsymbol{\beta_1}$) eingesetzt

$BP = 115{,}64\cdot\sin(107{,}1008°):\sin(180° - 107{,}1008° - 63{,}43°) \approx 671{,}83$ m

Die Entfernung vom Standpunkt B des Beobachters zum Punkt P beträgt
BP ≈ 671,83 m